

Corrigé

Contrôle Continu Algèbre Linéaire - Groupe 1 - 30 janvier 2024

1h - documents et calculatrice interdites

Exercice 1 (3 points)

Calculez AB dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 4 \end{pmatrix}$$

3) $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (4 points)

Donnez la diagonale et la trace des matrices suivantes lorsque c'est possible :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 27 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B^2, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{diag}(A) = (6, -3, 5), \text{Tr}(A) = 8.$$

$$\text{diag}(B) = (1, 2, 5), \text{Tr}(B) = 8.$$

$$\text{diag}(B^2) = (1, 4, 25), \text{Tr}(B^2) = 30.$$

La matrice C n'est pas carrée donc sa diagonale et sa trace ne sont pas définis.

Exercice 3 (2 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{pmatrix}$. Trouvez x tel que M soit une matrice symétrique.

La matrice M est symétrique donc $x+2 = 2x-3 \Leftrightarrow x = 5$. Nous obtenons donc $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (2 points)

Donnez un exemple de matrices 2×2 réelles A et B telles que aucun des termes de A et B ne soient nuls et qu'on ait $AB = 0$.

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des matrices dont aucun des coefficients sont nuls et telles que $AB = 0$.

Exercice 5 (3 points)

Donnez un exemple de matrice 2×2 réelle A telle que A^2 soit diagonale, mais A ne l'est pas.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nous souhaitons que $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bd & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$ soit diagonale, mais pas A . Autrement dit, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, et

$$\begin{cases} b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \end{cases}$$

Donc $a+d = 0$. Nous pouvons par exemple choisir $a = 1$, $d = -1$, $b = 2$ et $c = 1$. Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est un exemple de matrice non diagonale telle que son carrée est diagonale.