

**Contrôle Continu Algèbre Linéaire - Groupe 1 - 29 mars 2024**

*1h30 - documents et calculatrice interdites*

## Exercice 1

Soient les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} 3x & +2y & -5z & = 14 \\ 2x & +y & -2z & = 9 \\ -x & -2y & +z & = -6 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x & +2y & -3z & = 1 \\ 2x & +y & & = 8 \\ -x & -3y & +5z & = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) \begin{cases} x & -5y & = 1 \\ 2x & -9y & = 8 \end{cases}$$

- 1) Donner les matrices de chacun des systèmes linéaires.
- 2) Échelonner chacun des systèmes linéaires.
- 3) Pour chacun des systèmes échelonnés, donner les variables libres et les variables liées.
- 4) Résoudre chacun des systèmes linéaires.

## Exercice 2

Échelonner le système linéaire suivant puis résoudre celui-ci en discutant des valeurs des paramètres réels  $a$  et  $b$ .

$$\begin{cases} ax & +3y & = 1 \\ 2x & -7y & = 2b \end{cases}$$

## Exercice 3

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer par l'algorithme de Gauss l'inverse de la matrice  $AB$ .

## Exercice 4

Soient

$$\vec{u} = (1, 3, 4), \quad \vec{v} = (2, 5, 2), \quad \vec{w} = (1, 2, -2).$$

- 1) Déterminer une base de l'espace  $F$  engendré par  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et donner la dimension de  $F$ .
- 2) Compléter la base de  $F$  en une base de  $\mathbb{R}^3$  avec des vecteurs de la base canonique.

## Exercice 5

Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

- 1)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z = 0\}$  dans  $\mathbb{R}^3$
- 2)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = 5y\}$  dans  $\mathbb{R}^2$
- 3)  $H = \{M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$

## Exercice 6

Exprimer le polynôme  $2X^2 + X - 3$  dans  $\mathbb{R}[X]$  comme combinaison linéaire des polynômes  $P_1 = 5X^2 - 2X$ ,  $P_2 = -3X^2 + X - 1$  et  $P_3 = 3X^2 + 1$ .