

Contrôle Continu Algèbre Linéaire - Groupe 1 - 16 avril 2024

1h - documents et calculatrice interdites

Exercice 1

Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

- 1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
- 2) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 7y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

- 1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) $G = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f + f' = 0\}$ dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- 3) L'espace H engendré par les vecteurs

$$\vec{u} = (-1, 5, 1), \quad \vec{v} = (7, 4, 5), \quad \vec{w} = (-3, 2, -1).$$

Exercice 3

Vérifier si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x)$.
- 2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + zy, y + z)$.
- 3) $f : \mathbb{R}_n[x] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P(X^2) - P'(X^3)$.

Exercice 4

Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1 + i, 2i)$ et $\vec{v} = (1, 1 + i)$ dans $\mathbb{C}^2$ sont linéairement dépendants dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$ mais linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.