

Contrôle Continu Algèbre Linéaire - MI-MP - 3 avril 2025

1h - documents et calculatrice interdites

Exercice 1

Vérifier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels :

- 1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 3z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) $G = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ dans $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

- 1) Déterminer, dans $\mathbb{R}^4$, une base et la dimension des sous-espaces vectoriels

$$F = \text{Vect}((1, -1, 1, -1), (2, 1, 2, -2), (4, -1, 4, -4))$$

et

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + x = 0 \text{ et } y + t = 0\}.$$

- 2) Déterminer $F \cap G$.
- 3) Déterminer une base et la dimension de $F + G$

Exercice 3

Vérifier si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, y^2)$.
- 2) $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $g(P) = 3P - P'$.
- 3) $h : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(P) = \deg(P)$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, 3y + z)$.

- 1) Montrer que f est une application linéaire.
- 2) Montrer que $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel.
- 3) Montrer que $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel.